# Tangenti a una parabola



Consideriamo il problema di determinare le tangenti a una parabola da un punto del piano.

Possono presentarsi 3 casi:

- se il punto è interno non ci sono tangenti
- se il punto è sulla parabola c'è una sola tangente
- se il punto è esterno si hanno due tangenti

## Esempi

1) Calcola le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y=-x^2+2x+4$ condotte dal punto $P\left(\frac{1}{2},7\right)$ e le coordinate dei punti di tangenza.

Il fascio di rette per P ha equazione

$$y-7=m\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Mettendo a sistema con l'equazione della parabola si ha:

$$-x^2+2x+4=mx-\frac{1}{2}m+7$$

$$-x^2+(2-m)x+\frac{1}{2}m-3=0$$

Le tangenti devono avere un solo punto di intersezione, quindi il discriminante deve essere nullo: $\Delta(m)=0$

$$\Delta(m)=(2-m)^2+4\left(\frac{1}{2}m-3\right)=0$$

Si ottiene un'equazione di 2° grado in $m$:

$$4-4m+m^2+2m-12=0$$

$$m^2-2m-8=0$$

$$m=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm3=\begin{cases}4\\-2\end{cases}$$

Si ottengono 2 valori di $m$, corrispondenti a 2 rette del fascio, le rette tangenti:

$$y-7=m\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Per $m=4$ si ha la retta di equazione

$$y-7=4\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad y=4x+5$$

$$4x-y+5=0$$

Per $m=-2$ si ha la retta

$$y-7=-2x+1, \quad 2x+y-8=0$$

I punti di tangenza si ottengono dal sistema:

$$-x^2+(2-m)x+\frac{1}{2}m-3=0$$

per $m=4 \Rightarrow -x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=-1$

sostituendo nell'equazione della parabola si ottiene $y=-(-1)^2+2\cdot(-1)+4=1$

Il punto di tangenza è $A(-1,1)$.

Per l'altra retta: $m=-2$

$-x^2+4x-1-3=0,$

$-x^2+4x-4=0, \quad (x-2)^2=0, \quad x=2$

$y=-x^2+2x+4, \quad y=-4+4+4=4$

Il secondo punto di tangenza è $B(2,4)$.